228. 有限個領域ニ於ケル函數ニ就イテ

伊 藤　誠（御影師範）

$\boxed{1}$ 今 $\{0, 1\}$ ナル2個ノ整數カラナル領域ニ於イテ次ノ表ニヨッテ定メラレル二変數ノ函數 $\varphi(x_1, x_2)$ ヲ考ヘル。

$\longrightarrow x_2$

φ	0	1
0	1	0
1	0	0

$\downarrow x_1$

然ルトキハ此ノ領域ニ於ケル任意ノ r 変數ノ函數

$f(x_1, x_2, \text{------}, x_r)$ ハ上ノ函數ヲ何回カ *iterieren* スルコトニヨッテ *erzengen* スルコトが出來ル。

何故ナラバ先ヅ 1変数ノ函数ハ明ラカニ $2^2 = 4$ 個ダケアリ。之ハ

1. $\varphi(x, x) = \sigma(x)$

2. $\varphi\big(\varphi(x,x), \varphi(x,x)\big) = \sigma\big(\sigma(x)\big) = \bar{\sigma}(x)$

3. $\varphi\big(x, \varphi(x,x)\big) = \varphi\big(x, \sigma(x)\big) \equiv 0$

4. $\varphi\Big(\varphi\big(x, \varphi(x,x)\big), \varphi\big(x, \varphi(x,x)\big)\Big) = \sigma\Big(\varphi\big(x, \sigma(x)\big)\Big) \equiv 1$

ニヨッテ表ハサレル。但シコヽニ $\sigma(x)$, 及ビ $\bar{\sigma}(x)$ ハ

$$\begin{cases} \sigma(0) = 1 \\ \sigma(1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{\sigma}(0) = 0 \\ \bar{\sigma}(1) = 1 \end{cases}$$

ナル性質ヲ有スル。

次ニ $(r-1)$ 変数マデノ函數ハスベテ $\varphi(x_1, x_2)$ ノ

Iteration ニヨッテ *erzeugen* スルコトガ出來タモノト假定スル。今任意ノ γ 変数函數 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_\gamma)$ ヲ取レバ，之ハ次ノ如ク書キ表ハセル：

$$f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_\gamma) = f(0, x_2, \cdots\cdots, x_\gamma)\cdot\sigma(x_1)$$
$$+ f(1, x_2, \cdots\cdots, x_\gamma)\cdot\overline{\sigma}(x_1) \cdots\cdots\cdots (1)$$

因ッテ

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2) = \varphi[\varphi(x_1, x_2), \varphi(x_1, x_2)] = \sigma(\varphi(x_1, x_2)) \\ \psi_2(x_1, x_2) = \varphi[\varphi(x_1, x_1), \varphi(x_2, x_2)] = \sigma(\sigma(x_1), \sigma(x_2)) \end{cases}$$

ナル二ツノ函数ヲ考ヘルト，此ノ領域ニ於テハ

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2) = x_1 \times x_2 \\ \psi_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \qquad x_1 = 0 \text{ od. } x_2 = 0 \text{ ノトキ} \\ \qquad\qquad = 1, \qquad x_1 = x_2 = 1 \text{ ノトキ} \end{cases}$$

トナル故，(1) ノ右辺ハ

$$\psi_2[\psi_1(f(0, x_2, \cdots\cdots, x_\gamma), \sigma(x_1)),$$
$$\psi_1(f(1, x_2, \cdots\cdots, x_\gamma), \overline{\sigma}(x_1))]$$

ト書クコトガ出來ル。コヽニ σ, $\overline{\sigma}$, ψ_1, ψ_2 ハ既ニ示シタ如ク φ ノ *Iteration* ニヨッテ定義サレ，又 $f(0, x_2, \cdots\cdots, x_\gamma)$ 及ビ $f(1, x_2, \cdots\cdots, x_\gamma)$ ハ何レモ $(\gamma-1)$ 変数ノ函數デアルカラ、假定ニヨッテ $\varphi(x_1, x_2)$ ノ *Iteration* ニヨッテ *erzeugen* サレ得ル。従ッテ上式即チ $f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_\gamma)$ モ亦 φ ニヨッテ *erzeugen* サレルコトトナル。

以上ニヨッテ此ノ領域ニ於ケル悉エル函数ハ只一ツノ2変数函數 $\varphi(x_1, x_2)$ ニヨッテ *erzeugen* サレルコトガ

分ッタ。

$\varphi(x_1, x_2)$ ノ代リニ次ノ函數 $\varphi'(x_1, x_2)$ ヲ取ッテモ矢張リ同様ノコトガ云ヘル：

$$
\begin{array}{c|c|c}
\varphi' & 0 & 1 \\
\hline
0 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0
\end{array}
\qquad (\rightarrow x_2,\ \downarrow x_1)
$$

何故ナラバ $\varphi(x_1, x_2)$ ハ $\varphi'(x_1, x_2)$ ニヨッテ次ノ如ク表ハセルカラ：

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi'\left[\varphi'\left(\varphi'(x_1, x_1), \varphi'(x_2, x_2)\right),\right.$$
$$\left.\varphi'\left(\varphi'(x_1, x_1), \varphi'(x_2, x_2)\right)\right].$$

扨テ φ, φ' 以外ニハ最早ヤ斯様ニ總ベテノ *Funktionen* ヲ *erzengen* スル *Basisfunktion* ハナイデアラウカ？　答ハ然リデアル．　証明ハ次ノ様デアル。

２変数函數ヲ $f(x_1, x_2)$ トスルトキ，

1°)　$f(0, 0) = 0$ ナル如キ f ハ *Basis* トナリ得ナイ。何故ナラ、カヽルナ *Funktion* ヲ何回 *iterieren* シテモ $x = 1$ ナル函数ハ得ラレナイカラ。

2°)　$f(1, 1) = 1$ ナル如キ f モ亦 *Basis* トナリ得ナイ．

何故ナラ、之ニヨッテ $x = 0$ ナル函数ハ得ラレナイ故．

3°)　$f(x_1, 0) = 1$,　$f(x_1, 1) = 0$ ナル如キ f モ亦不可．

何故ナラ此ノトキハ $f(x_1, x_2)=1-x_2$ トナリ、之ヲ iterieren スルコトニヨツテ生ズル1変数函數ハ x 又ハ $1-x$ ダケデ $x=1$, 又ハ $x=0$ ナル函數ハ得ラレナイ。

4°) $f(0, x_2)=1$, $f(1, x_2)=0$ ナル如キナモマタ 3°) ト同様ニ Basis トナリ得ナイ。

1°), 2°), 3°), 4°) 以外ノ函數デ常数トナラナイモノハ先ニ挙ゲタ φ 及ビ φ' ノミデアル。

2 上述ニ於イテハ便宜上 $\{0, 1\}$ ナル二整數カラナル領域ニツイテ考ヘタガ、$\{\alpha_0, \alpha_1\}$ ナル任意ノ2元素カラナル領域ニツイテ考ヘテモ結果ハ全ク同様デアル。

上ノ所論ヲ任意ノ $\nu=n+1$ 個ノ Elemente $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \text{------}, \alpha_n\}$ カラナル所謂 ν-zahlig ナ領域ニ拡張スルコトハ出來ナイデアラウカ？
之ニ就イテ分ツタ事柄ダケヲ述ベテミル。

便宜上前ト同様ニ $\{\alpha_0, \alpha_1, \text{------}, \alpha_n\}$ ヲ $\{0, 1, 2, \text{------}, n\}$ ナル整数デ代表サセルコトニスル. 先ヅコノ領域ニ於ケル任意ノ1変数ノ函数 $f(x)$ ヲ取ツテ考ヘルト, 之ハ次ノ如ク書キ表ハセル：

$$f(x)=\sum_{\lambda=0}^{n} f(\lambda)\cdot\sigma(x, \lambda) \text{ ------------------ (1)}$$

但シコヽニ $\sigma(x, \lambda)$ ナル函數ハ

$$\begin{cases} x=\lambda \text{ ナルトキ } & 1 \\ x\neq\lambda \quad \text{〃} & 0 \end{cases}$$

ナル1変数ノ函数ヲ表ハスモノトスル。

今特ニ

$$\begin{cases}\psi_1(x_1,0)=0\\ \psi_1(x_1,1)=x_1\end{cases}\qquad \begin{cases}\psi_2(x_1,0)=x_1\\ \psi_2(0,x_2)=x_2\end{cases}$$

ナル性質ヲ有スル二ツノ函数 $\psi_1(x_1,x_2)$, $\psi_2(x_1,x_2)$ ヲ考ヘルト

$$\begin{cases}\psi_1(x_1,x_2)=x_1\times x_2 & x_2=0 \text{ od. } 1 \text{ ノトキ}\\ \psi_2(x_1,x_2)=x_1+x_2 & x_1=0 \text{ od. } x_2=0 \text{ ノトキ}\end{cases}$$

ナル故、(1) ノ右辺ハ ψ_1, ψ_2 並ビニ $x=f(\lambda)=konst.$, 及ビ $\sigma(x,\lambda)$, $(\lambda=0,1,2,\text{------},n)$ ナル1変数函数ニヨツテ書キ表ハサレル。而モ此ノ際 (1) ノ右辺ヨリ分ルヤウニ ψ_1 ハ $(n+1)$ 回, ψ_2 ハ n 回用ヒラレル。

次ニ任意ノ r 変数函數 $f(x_1,x_2,\text{-------},x_r)$ ヲ取ルト，前同様

$$f(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_r)=\sum_{\lambda=0}^{n}f(\lambda,x_2,\cdots\cdots,x_r)\cdot\sigma(x_1,\lambda)$$

ト書クコトガ出來ル。從ツテ $(r-1)$ 変数函数マデハ ψ_1, ψ_2 及ビ $x=k$, $(k=0,1,2,\text{-------},n)$, $\sigma(x,\lambda)$, $(\lambda=0,1,2,\text{-------},n)$ ナル1変数函数ニヨツテ悉ク erzengen スルコトガ出來ルト假定スレバ，r 変数函数ノ場合ニモ矢張リ然ルコトガ言ヘル。而シテコノ場合ニハ ψ_1 ハ $(n+1)^r$ 回, ψ_2 ハ n^r 回, σ ハ $(n+1)^r$ 回 $x=k$, $(k=0,1,2,\text{-------},n)$ ハ各1回宛用ヒラルルコトガ Induktion ニ

ヨツテ容易ニ分ル。

上述ニヨツテ一般ニ次ノ定理ガ得ラレル：

〔定理〕 $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n\}$ ナル $\nu=n+1$ 個ノ Elemente カラナル所謂 ν-zahlig ノ Bereich ニ於イテハ、任意ノ函数 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_\nu)$ ハ上述ノ如キニツノ2変数函数 $\psi_1(x_1, x_2)$, $\psi_2(x_1, x_2)$ 及ビ $x=k$ $(k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n)$, $\sigma(x, \lambda)$, $(\lambda=0, 1, 2, \cdots\cdots, n)$ ナル $2(n+1)=2\nu$ 個ノ1変数函数ニヨツテ erzeugen サレル。而シテコノ際 ψ_1 ハ ν^ν 回, ψ_2 ハ $(\nu-1)^\nu$ 回, σ ハ ν^ν 回, $x=k$ $(k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n)$ ハ各1回宛用フレバ充分デアル。

此ノ定理ノ上ニ述ベタ証明ハ神戸商大ノ水谷一雄氏カラ教ヘテ頂イタ方針ニ従ツテ行ツタモノデアル。更ニ残サレタ問題ハ

〔第一〕 2-zahlig ノ領域ニ於ケルヤウニ、ψ_1, ψ_2 及ビ悉ユル1変数函数ヲ只一ツノ2変数函数ニヨツテ erzeugen スルコトガ出来ナイカ？ 若シ出来ルトスレバ幾通リ左様ナ函数ガ存在スルカ？

〔第二〕 上ノ所論ヲ abzählbar unendlich 又ハ連続領域ニ拡張シタラ如何ナルカ？

ト云フコトデアル． 第一ノ問題ノ中『只一ツノ2変数函数 $\varphi(x_1, x_2)$ トシテ次ノゴトキモノヲ撰ベバ、之レニヨツテ総テノ1変数函数ガ erzeugen サレルコト』ハ角谷，水

谷両氏ガ置換群ノ考ヘヲ用ヒテ解決サレタ。

$\longrightarrow x_2$

$\downarrow x_1$	0	1	2	3	4	----------	$n-2$	$n-1$	n
0	1							$n-1$	n
1	1	2							n
2	1	0	3						
3		1	2	4					
4			2	3	5				
				3	4				
⋮					4				
$n-2$							$n-1$		
$n-1$							$n-2$	n	
n							$n-2$	$n-1$	0

猶未解決ノ点ニ就イテ諸賢ノ御教示ヲ得レバ幸ヒデアル。

—(1935, 10, 10)—